Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 7 im Sommersemester 2021 (am 28.05.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS20.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS21.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.
y.z	verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

14 Kommutative lineare algebraische Gruppen

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori

Aus dem Beweis des zuletzt bewiesenen Satzes SS21.6, 2.6 (bzw. 3.2.6) ergeben sich die folgenden

Bemerkungen

(i) Eine reguläre Abbildung

$$\psi: G' \longrightarrow G''$$

von diagonalisierbaren linearen algebraischen Gruppen G' und G'' ist genau dann ein Homomorphismus von linearen algebraischen Gruppen, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Die induzierte Abbildung der Koordinatenringe

$$\psi^*: k[G''] \longrightarrow k[G']$$

bildet die Charaktergruppen ineinander ab,

$$\psi^*(X^*(G'')) \subseteq X^*(G')$$

2. Die auf den Charaktergruppen induzierte Abbildung,

$$\psi^*: X^*(G'') \longrightarrow X^*(G'),$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus.

(ii) Für beliebige endlich erzeugte abelsche Gruppen M, M', M'' (ohne p-Torsion, falls die Charakteristik p des Grundkörpers k ungleich Null ist) gilt

(a) $\mathcal{G}(M'\oplus M'') \cong \mathcal{G}(M') \times \mathcal{G}(M'')$
(Isomorphie von linearen algebraischen Gruppen).

(b) $\mathcal{G}(\mathbb{Z}) \cong \mathbf{G}_m$
(Isomorphie von linearen algebraischen Gruppen).

(c) $\mathcal{G}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ist als lineare algebraische Gruppe isomorph zur Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Dabei sei n teilerfremd zu p, falls $p \neq 0$ ist.

(d) $\# \mathcal{G}(M) = \# M$ falls M endlkich ist.

Beweis von (ii)(d). Nach (ii)(c) haben $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathcal{G}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ dieselbe Ordnung n, d.h. Aussage (d) gilt trivialerweise. Im allgemeinen Fall ist M direkte Summe endlicher zyklischer Gruppen, sagen wir

$$M \cong (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})\oplus...\oplus(\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})$$

Für die Ordnungen erhalten wir damit

$$\# M = \#(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})\bullet\ldots\bullet(\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}) = n_1\bullet\ldots\bullet n_r$$

und

$$\begin{aligned}\# \mathcal{G}(M) &= \#(\mathcal{G}(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})\times\ldots\times\mathcal{G}(\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}))\\ &= \# \mathcal{G}(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})\bullet\ldots\bullet \# \mathcal{G}(\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})\\ &= n_1\bullet\ldots\bullet n_r,\end{aligned}$$

d.h. auch im allgemeinen Fall sind die Ordnungen gleich.
QED.

14.2.7 Charakterisierung der Tori

Sei G eine diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe über dem (algebraisch abgeschlossenen) Körper k der Charakteristik p. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) G ist das Produkt eines Torus mit einer endlichen abelschen Gruppe, deren Ordnung teilerfremd zu p ist im Fall $p \neq 0$.
(ii) G ist genau dann ein Torus, wenn G zusammenbängend ist.
(iii) G ist genau dann ein Torus, wenn die Charaktergruppe $\mathbf{X}^*(G)$ eine freie[1] abelsche Gruppe ist.

Beweis. Zu (i). Nach 3.2.6 (iii) hat G bis auf Isomorphie die Gestalt

$$G \cong \mathcal{G}(M)$$

mit einer endlich erzeugten abelschen Gruppe M ohne p-Torsion, falls $p \neq 0$ ist. Die Gruppe M ist direktes Produkt von zyklischen Gruppen, d.h.

$$M = \mathbb{Z}^n \oplus M'$$

mit einer endlichen abelschen Gruppe M' ohne p-Torsion.Nach Bemerkung 3.2.6(ii) (a) folgt

$$G \cong \mathcal{G}(\mathbb{Z}^n)\times\mathcal{G}(M').$$

Es reicht zu zeigen, dies ist eine Faktorzerlegung der behaupteten Gestalt.
Nach den Bemerkungen 3.2.6 (a) und (b) ist der erste Faktor

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathbb{Z}^n) &\cong \mathcal{G}(\mathbb{Z}) \times \ldots \times \mathcal{G}(\mathbb{Z}) \quad \text{(n-mal)}\\ &\cong \mathbf{G}_m\times\ldots\times\mathbf{G}_m \quad \text{(n-mal)}\\ &\cong \mathbf{D}_n\end{aligned}$$

ein Torus.
Weil M' endlich ist, ist nach Bemerkung 3.2.6(ii) (d) auch $\mathcal{G}(M')$ endlich und besitzt im Fall $p \neq 0$ keine p-Torsion, also eine zu p teilerfremde Ordnung.

Zu (ii). Wenn die endliche Gruppe $\mathcal{G}(M')$ im obigen Beweis die Ordnung m hat, so ist

$$G \cong \mathbf{D}_n \times G'$$

disjunkte Vereinigung der m abgeschlossenenen Teilmengen

$$\mathbf{D}_n \times \{x\} \text{ mit } x \in \mathcal{G}(M').$$

Als Varität G genau dann zusammenhängend, wenn deren Anzahl gleich 1 ist, d.h. wenn G' die triviale Gruppe und

$$G \cong \mathbf{D}_n$$

ein Torus ist.
Zu (iii). Ist $\mathbf{X}^*(G)$ eine freie abelsche Gruppe, d.h.

$$\mathbf{X}^*(G) \cong \mathbb{Z}^n,$$

so ist

[1] d.h. die Gruppe ist torsionsfrei, d.h. in der Zerlegung in eine direkte Summe zyklischer Gruppen kommt kein direkter Summand von endlicher Ordnung vor, d.h. die Gruppe ist eine direkte Summe von endlich vielen Exemplaren von $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} G &\cong \mathcal{G}(\mathbf{X}^*(G)) && \text{(nach 3.2.6 (iii))} \\ &\cong \mathcal{G}(\mathbb{Z}^n) \\ &\cong \mathbf{D}_n && \text{(nach dem Beweis von (i))} \end{aligned}$$

ein Torus (nach der Definition in 3.2 1). Ist umgekehrt G ein Torus, d.h.

$$G \cong \mathbf{D}_n,$$

so ist $X^*(G) \cong X^*(\mathbf{D}_n) = \mathbb{Z}^n$ (nach Beispiel 3.2.2).

QED.

14.2.8 Starrheit der diagonalisierbaren Gruppen)

Seien

$$G \text{ und } H$$

diagonalisierbare lineare algebraische Gruppen und

$$V$$

eine zusammenhängende affine algebraische Varietät. Weiter sei eine <u>reguläre Familie von Homomorphismen algebraischer Gruppen</u>

$$\phi_t: G \longrightarrow H, t \in V,$$

gegeben, d.h. ein Morphismus von algebraischen Varietäten

$$\phi: V\times G \longrightarrow H, (t, x) \mapsto \phi(t,x),$$

für welchen die Einschränkungen

$$\phi_t: G \cong \{t\}\times G \longrightarrow H, x \mapsto \phi(t,x),$$

mit $t \in V$ Gruppen-Homomorphismen sind. Dann hängt $\phi_t(x) = \phi(t,x)$ nicht von t ab.

Beweis. Sei

$$\psi \in X^*(H) \subseteq k[H]$$

ein Charakter von H (vgl. 3.2.3 (i)). Dann ist

$$\psi\circ\phi: V\times G \xrightarrow{\phi} H \xrightarrow{\psi} k$$

eine reguläre Funktion auf $V\times G$,

$$\psi\circ\phi \in k[V\times G] = k[V]\otimes_k k[G].$$

Weil die Charaktere von G eine k-Vektorraumbasis von k[G] bilden,

$$k[G] = \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} k\bullet\chi = \bigoplus_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} k\bullet\chi$$

(nach 3.2.3 (i)), bilden die Elemente $1\otimes\chi$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $k[V]\otimes_k k[G]$ über $k[V]$,

$$k[V]\otimes_k k[G] = \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} k[V]\bullet(1\otimes\chi) = \bigoplus_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} k[V]\bullet(1\otimes\chi)$$

(weil das Tensorprodukt mit direkten Summen kommutiert). Damit gibt es eindeutig bestimmte $f_{\chi,\psi} \in k[V]$ mit

$$\psi\circ\phi = \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} f_{\chi,\psi}\otimes\chi,$$

d.h. mit

$$\psi(\phi(t,x)) = \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} f_{\chi,\psi}(t)\cdot\chi(x) \text{ für beliebige } t \in V \text{ und beliebige } x\in G.$$

Für jedes fest gewählte $t \in V$ steht auf der linken Seite ein Charakter von G. Weil die Charaktere von G eine k-Vektorraumbasis von k[G] bilden, ist von den Koeffizienten $f_{\chi,\psi}(t)$ genau einer gleich 1 und alle anderen gleich 0 (für jedes feste t). Insbesondere liegt das Bild der regulären Abbildung

$$f_{\chi,\psi}: V \longrightarrow k$$

für jedes χ und jedes ψ in der Menge {0,1}. Weil V zusammenhängend ist, muß auch das Bild bei $f_{\chi,\psi}$ zusammenhängend sein, d.h. die Funktionen sind konstant. Damit ist genau ein $f_{\chi,\psi}$ konstant gleich 1 und alle übrigen $f_{\chi,\psi}$ sind konstant gleich 0: für ein $\chi_0 \in \mathbf{X}^*(G)$ gilt

$$\psi(\phi(t,x)) = \chi_0(x) \text{ für jedes } t\in V \text{ und jedes } x\in G$$

(und jedes $\psi\in\mathbf{X}^*(H)$). Dabei kann χ_0 natürlich von der Wahl des Charakters ψ abhängen. Ersetzt man ψ durch eine k-Linearkombination von Charakteren von H, so steht auf der rechten Seite die zugehörige k-Linearkombination von solchen Charakteren χ_0 von G. Unter diesen Linearkombinationen der ψ sind auch die Koordinatenfunktionen der Einbettung der algebraischen Varietät H in einen k^n. Die Zusammensetzungen von ϕ mit diesen Koordinatenfunktionen sind gerade die Koordinatenfunktionen der Abbildung ϕ. Diese sind also von t unabhängig. Damit ist auch ϕ von t unabhängig.
QED.

14.2.9 Zentralisator und Normalisator einer abgeschlossenen Untergruppe

14.2.9 A Definition

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann heißen

$$\mathbf{Z}_G(H) := \{x \in G \mid xyx^{-1} = y \text{ für jedes } y\in H\}$$

Zentralisator von H in G und

$$\mathbf{N}_G(H) := \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$$

Normalisator von H in G.

Bemerkungen

(i) $\mathbf{Z}_G(H)$ und $\mathbf{N}_G(H)$ sind abgeschlossene Untergruppen von G.

(ii) $\mathbf{Z}_G(H)$ ist ein Normalteiler von $\mathbf{N}_G(H)$.

Beweis. Zu (i). $\mathbf{Z}_G(H)$ ist Untergruppe von G.

Wegen $eye^{-1} = y$ liegt das neutrale Element e in $\mathbf{Z}_G(H)$.

Mit $x', x'' \in \mathbf{Z}_G(H)$ gilt

$$(x'x'')\cdot y\cdot(x'x'')^{-1} = x'\cdot(x''\cdot y\cdot x''^{-1})\cdot x'^{-1}$$

$$= x'\bullet y\bullet x'^{-1} \qquad \text{(wegen } x''\in \mathbf{Z}_G(H))$$
$$= y \qquad \text{(wegen } x'\in \mathbf{Z}_G(H))$$

also gilt $x'x'' \in \mathbf{Z}_G(H)$.

Mit $x \in \mathbf{Z}_G(H)$ gilt $xyx^{-1} = y$, also $y = x^{-1}y(x^{-1})^{-1}$, also $x^{-1}\in \mathbf{Z}_G(H)$.

$\mathbf{N}_G(H)$ <u>ist Untergruppe von</u> G.

Wegen $eHe^{-1} = H$ liegt das neutrale Element e in $\mathbf{N}_G(H)$.

Mit $x', x'' \in \mathbf{N}_G(H)$ gilt

$$(x'x'')\bullet H\bullet(x'x'')^{-1} = x'\bullet(x''\bullet H\bullet x''^{-1})\bullet x'^{-1}$$
$$= x'\bullet H\bullet x'^{-1} \qquad \text{(wegen } x''\in \mathbf{N}_G(H))$$
$$= H \qquad \text{(wegen } x'\in \mathbf{N}_G(H))$$

also gilt $x'x'' \in \mathbf{N}_G(H)$.

Mit $x \in \mathbf{N}_G(H)$ gilt $xHx^{-1} = H$, also $H = x^{-1}H(x^{-1})^{-1}$, also $x^{-1}\in \mathbf{H}_G(H)$.

$\mathbf{Z}_G(H)$ <u>ist abgeschlossen in</u> G.

Für $x \in G$ bezeichen mit mit σ_x die reguläre Abbildung

$$\sigma_x: G \longrightarrow G,\ y \mapsto xyx^{-1}.$$

Dann gilt nach Definition

$$\mathbf{Z}_G(H) = \{x \in G \mid \mid xyx^{-1} = y \text{ für jedes } y\in H\}$$
$$= \{x \in G \mid x = yxy^{-1} \text{ für jedes } y\in H\}$$
$$= \{x \in G \mid x = \sigma_y(x) \text{ für jedes } y\in H\}$$
$$= \bigcap_{y\in H} \{x\in G \mid \sigma_y(x) = Id(x)\}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß für jedes $y\in H$ die Menge

$\{x\in G \mid \sigma_y(x) = Id(x)\}$ = Urbild der Diagonalen $\Delta_G \subseteq G\times G$ bei $(\sigma_y, Id):G\longrightarrow G\times G$

abgeschlossen ist in G. Als affine Varietät ist G separiert. Deshalb ist die Diagonale

$$\Delta_G := \{(x,x) \mid x \in G\} \subseteq G\times G$$

abgeschlossen in $G\times G$. Dann ist aber auch das Uribild von Δ_G bei der regulären Abildung

$$(\sigma_y, Id):G\longrightarrow G\times G,\ x \mapsto (\sigma_y(x), x)$$

abgeschlossen (vgl. auch Beispiel 1.6.6).

<u>Alternativer Beweis</u>. Sei $x_1,...,x_n \in k[G]$ ein Erzeugendensystem der k-Algebra k[G].

Zwei Punkte $p,q \in G$ sind genau dann gleich, wenn gilt

$$x_i(p) = x_i(q) \text{ für } i = 1,..., n$$

(weil diese dann dieselben Koordinaten haben). Damit gilt

$$\mathbf{Z}_G(H) = \{p \in G \mid \mid qpq^{-1} = p \text{ für jedes } q\in H\}$$

$= \{p \in G \mid x_i(qpq^{-1}) = x_i(p)$ für jedes $q \in H$ und für $i = 1,...,n\}$

$= \{p \in G \mid (x_i \circ \sigma_q)(p) = x_i(p)$ für jedes $q \in H$ und für $i=1,...,n\}$

$= V(\sigma_q^*(x_1)-x_1,..., \sigma_q^*(x_n)-x_n)$,

Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge von G.

$\mathbf{N}_G(H)$ <u>ist abgeschlossen in</u> G.

Als abgeschlossene Teilmenge hat H die Gestalt

$$H = V(f_1,...,f_m) \text{ mit } f_i \in k[G].$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_G(H) &= \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}\\ &= \{x \in G \mid xHx^{-1} \subseteq H \text{ und } x^{-1}Hx \subseteq H\}\\ &= \{x \in G \mid xhx^{-1} \subseteq H \text{ und } x^{-1}hx \subseteq H \text{ für jedes } h \in H\}\\ &= \{x \in G \mid f_i(xhx^{-1}) = 0 \text{ und } f_i(x^{-1}hx) = 0 \text{ für jedes } h \in H\}\end{aligned}$$

Seien μ: $G\times G \longrightarrow G$ die Multiplikation von G und i: $G \longrightarrow G$ der Übergang zum Inversen. Dann gilt

$$\begin{aligned}xhx^{-1} &= \mu(x, hx^{-1})\\ &= \mu(x,\mu(x, i(h)))\\ &= (\mu\circ(Id\times\mu)\circ(Id\times Id\times i))(x,h,x)\\ &= (\mu\circ(Id\times\mu)\circ(Id\times Id\times i)\circ(Id\times\tau))(x,x,h)\\ &= (\mu\circ(Id\times\mu)\circ(Id\times Id\times i)\circ(Id\times\tau)\circ(\Delta\times Id))(x,h)\\ &= \varphi(x,h)\end{aligned}$$

mit einer regulären Abbildung φ. Dabei bezeichne

$$\tau: G\times G \longrightarrow G\times G,\ (u,v) \mapsto (v,u),$$

die reguläre Abbildung,welche die Koordinaten vertauscht und

$$\Delta: G \longrightarrow G\times G,\ x \mapsto (x,x),$$

die Diagonaleinbettung. Analog erhält man

$$x^{-1}hx = \psi(x,h)$$

mit ener regulären Abbildung ψ. Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\mathbf{N}_G(H) = V(\varphi^*(f_i)(x,h), \psi^*(f_i)(x,h) \mid h \in H, i = 1,...,m).$$

Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge von G.

<u>Zu (ii)</u>. Für jedes $g \in \mathbf{N}_G(H)$ gilt

$$\begin{aligned}g\mathbf{Z}_G(H)g^{-1} &= \{gxg^{-1} \mid x \in G \text{ und } xyx^{-1} = y \text{ für jedes } y\in H\}\\ &= \{x \mid x \in G \text{ und } (g^{-1}xg)y(g^{-1}xg)^{-1} = y \text{ für jedes } y\in H\}\\ &= \{x \mid x \in G \text{ und } g^{-1}xgyg^{-1}x^{-1}g = y \text{ für jedes } y\in H\}\\ &= \{x \mid x \in G \text{ und } xgyg^{-1}x^{-1} = gyg^{-1} \text{ für jedes } y\in H\}\\ &= \{x \mid x \in G \text{ und } xyx^{-1} = y \text{ für jedes } y\in gHg^{-1}\}\end{aligned}$$

Wegen $g \in \mathbf{N}_G(H)$ gilt $gHg^{-1} = H$, also

$$g\mathbf{Z}_G(H)g^{-1} \quad = \{x \mid x \in G \text{ und } xyx^{-1} = y \text{ für jedes } y\in H \} = \mathbf{Z}_G(H).$$

QED.

14.2.9 B Der diagonaliserbare Fall

Seien G eine diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe und $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\mathbf{Z}_G(H)$ und $\mathbf{N}_G(H)$ haben dieselbe Komponenten der Eins,

$$\mathbf{Z}_G(H)^0 = \mathbf{N}_G(H)^0$$

(ii) $\mathbf{N}_G(H)/\mathbf{Z}_G(H)$ ist endlich.

Beweis. Zu (i). Wir betrachten die Abbildung

$$V\times H \longrightarrow H,\ (t, x) \mapsto txt^{-1},$$

mit $V = \mathbf{N}_G(H)^0$. Als abgeschlossene Untergruppe einer diagonaliserbaren Gruppe ist H diagonalisierbar (vgl. die Definition in 3.2.1). Wir können deshalb 3.2.8 auf diese Abbildung anwenden, und sehen, daß die Abbildung nicht von t abhängt, d.h. es gilt $txt^{-1} = exe^{-1} = x$ für jedes $t \in \mathbf{N}_G(H)^0$ und jedes $x \in H$. Mit anderen Worten, es gilt

$$\mathbf{N}_G(H)^0 \subseteq \mathbf{Z}_G(H),$$

also

$$\mathbf{N}_G(H)^0 \subseteq \mathbf{Z}_G(H)^0.$$

Wegen

$$\mathbf{Z}_G(H)^0 \subseteq \mathbf{Z}_G(H) \subseteq \mathbf{N}_G(H)$$

liegt $\mathbf{Z}_G(H)^0$ auch in der Zusammenhangskomponente der Eins von $\mathbf{N}_G(H)$, d.h.

zusammen gilt $\mathbf{N}_G(H)^0 = \mathbf{Z}_G(H)$.

Zu (ii). $\mathbf{N}_G(H)/\mathbf{Z}_G(H)$ ist eine Faktorgruppe der Gruppe

$$\mathbf{N}_G(H)/\mathbf{Z}_G(H)^0,$$

welche nach (i) gleich

$$\mathbf{N}_G(H)/\mathbf{N}_G(H)^0.$$

Es reicht zu zeigen, letztere Gruppe ist endlich. Das ist aber der Fall nach 2.2.1(i).

QED.

Index

Inhalt